動的陽解法と動的緩和法について

地層科学研究所

1. 運動方程式

解くべき運動方程式は、次式である。

$$\rho \frac{d^2u}{dt^2} + c\frac{du}{dt} + f^i - f^e = 0 \tag{1}$$

ここに、u は変形、f^i は内力、f^e は外力、ρ は地盤の密度、c は減衰定数である。

時間微分を中央差分で近似して、

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \frac{u^{t+\Delta t} - 2u^t + u^{t-\Delta t}}{(\Delta t)^2} \tag{2}$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \tag{3}$$

とすれば、式(1)は、

$$\left(\frac{\rho}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{\Delta t}\right)u^{t+\Delta t} - \frac{2\rho}{(\Delta t)^2}u^t + \left(\frac{\rho}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{\Delta t}\right)u^{t-\Delta t} + f^i - f^e = 0 \tag{4}$$

となる。

2. 離散化手法

要素分割した領域に対して、内挿関数を重みとして式(4)に重み付き残差法を適用する。最初に、

$$h_1 = \frac{\rho}{(\Delta t)^2} + \frac{c}{\Delta t} \tag{5}$$

$$h_2 = -\frac{2\rho}{(\Delta t)^2} \tag{6}$$

$$h_3 = \frac{\rho}{(\Delta t)^2} - \frac{c}{\Delta t} \tag{7}$$

として、式(4)に内挿関数を乗じ対象領域で積分すると次式が得られる。ただし、積分は要素単位で行い合算することとする。

$$\begin{aligned}&\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T h_1 u^{t+\Delta t} dV_e\right) + \sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T h_2 u^t dV_e\right) + \sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T h_3 u^{t-\Delta t} dV_e\right) + \\ &\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T f^i dV_e\right) - \sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T f^e dV_e\right) = 0\end{aligned} \tag{8}$$

ここに、$[N]$は内挿関数からなるマトリクスである。

変位を節点値から内挿し、また h_1 が要素内で一定と近似すれば、

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T h_1 u^{t+\Delta t} dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(h_1 \int [N]^T [N]\{U\}^{t+\Delta t} dV_e\right) \tag{9}$$

となる。ここに、$\{U\}$は節点変位ベクトルである。

積分を実行して得られたマトリクスを対角化すると次式となる。

$$\sum_{e=1}^{E}\left(h_1 \int [N]^T [N]\{U\}^{t+\Delta t} dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(h_1 [W]\{U\}^{t+\Delta t}\right) \tag{10}$$

ここに、$[W]$は$\int [N]^T [N] dV_e$を対角化したマトリクスである。例えば、2 次元の三角形要素で内挿関数が 1 次の要素では、

$$[W] = \frac{V_e}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{11}$$

である。

左辺第 2 項、第 3 項についても同様である。

$$\sum_{e=1}^{E}\left(h_2 \int [N]^T [N]\{U\}^{t} dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(h_2 [W]\{U\}^{t}\right) \tag{12}$$

$$\sum_{e=1}^{E}\left(h_3 \int [N]^T [N]\{U\}^{t-\Delta t} dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(h_3 [W]\{U\}^{t-\Delta t}\right) \tag{13}$$

他方、内力は要素応力の等価節点力であり、

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T f^i dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T [\partial][\sigma] dV_e\right) \tag{14}$$

である。ここに、$[\partial]$は空間に関する偏導関数マトリクスである。また、

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T [\partial][\sigma] dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(\int [\partial]\left([N]^T [\sigma]\right) dV_e\right) - \sum_{e=1}^{E}\left(\int [\partial][N]^T [\sigma] dV_e\right) \tag{15}$$

であり、さらに発散定理から次式を得る。

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T [\partial][\sigma] dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T [\sigma_s] dS\right) - \sum_{e=1}^{E}\left(\int [\partial][N]^T [\sigma] dV_e\right) \tag{16}$$

あるいは、勾配マトリクス$[B]$を用いて次のように記述できる。

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T [\partial][\sigma] dV_e\right) = \sum_{e=1}^{E}\left(\int [N]^T [\sigma_s] dS\right) - \sum_{e=1}^{E}\left(\int [B]^T [\sigma] dV_e\right) \tag{17}$$

上式の右辺第 1 項は表面力である。右辺第 2 項の応力 σ は、変位とひずみ、および応力とひずみの関係より求められる。

$$[\varepsilon] = [\partial][N]\{U\}^t = [B]\{U\}^t \tag{18}$$

$$[\sigma]=[D][\varepsilon] \tag{19}$$

ここに、[D]は弾性定数マトリクスである。あるいは、次のように書くことができる。

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int[B]^{T}\sigma dV_{e}\right)=\sum_{e=1}^{E}\left(\int[B]^{T}[D][B]\{U\}^{t}dV_{e}\right)=\sum_{e=1}^{E}\left([K]\{U\}^{t}\right) \tag{20}$$

ここに、[K]は、

$$[K]=\int[B]^{T}[D][B]dV_{e} \tag{21}$$

であり、要素剛性マトリクスである。

外力は物体力$\left[F^{b}\right]$であり、

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int[N]^{T}f^{e}dV_{e}\right)=\sum_{e=1}^{E}\left(\int[N]^{T}\left[F^{b}\right]dV_{e}\right) \tag{22}$$

となる。

これまでの結果をまとめると、次式となる。

$$\sum_{e=1}^{E}\left(h_{1}[W]\{U\}^{t+\Delta t}\right)+\sum_{e=1}^{E}\left(h_{2}[W]\{U\}^{t}\right)+\sum_{e=1}^{E}\left(h_{3}[W]\{U\}^{t-\Delta t}\right)+\{F\}^{t}=0 \tag{23}$$

ここに、

$$\begin{aligned}\{F\}^{t}&=\left\{F^{s}\right\}^{t}-\left\{F^{i}\right\}^{t}+\left\{F^{b}\right\}^{t}\\&=\sum_{e=1}^{E}\left(\int[N]^{T}[\sigma_{s}]dS\right)-\sum_{e=1}^{E}\left([K]\{U\}^{t}\right)+\sum_{e=1}^{E}\left(\int[N]^{T}\left[F^{b}\right]dV_{e}\right)\end{aligned} \tag{24}$$

である。

変位の係数を、要素毎の合算が終わった形に書き直して、

$$[C_{1}]\{U\}^{t+\Delta t}+[C_{2}]\{U\}^{t}+[C_{3}]\{U\}^{t-\Delta t}+\{F\}^{t}=0 \tag{25}$$

となるが、係数マトリクスの[C]は対角化してあることから、上式は連立方程式ではなく節点ごとの並列式である。したがって、節点単位で次のようにして変位の更新値を求めることができる。

$$U^{t+\Delta t}=\frac{C_{2}U^{t}+C_{3}U^{t-\Delta t}+F^{t}}{C_{1}} \tag{26}$$

このように、動的陽解法では要素単位で節点値を求めて行くため、全体剛性マトリクスを作成することも連立方程式を解くこともない。

3.　動的陽解法の計算フロー

動的陽解法における計算のフローは、次のとおりである。

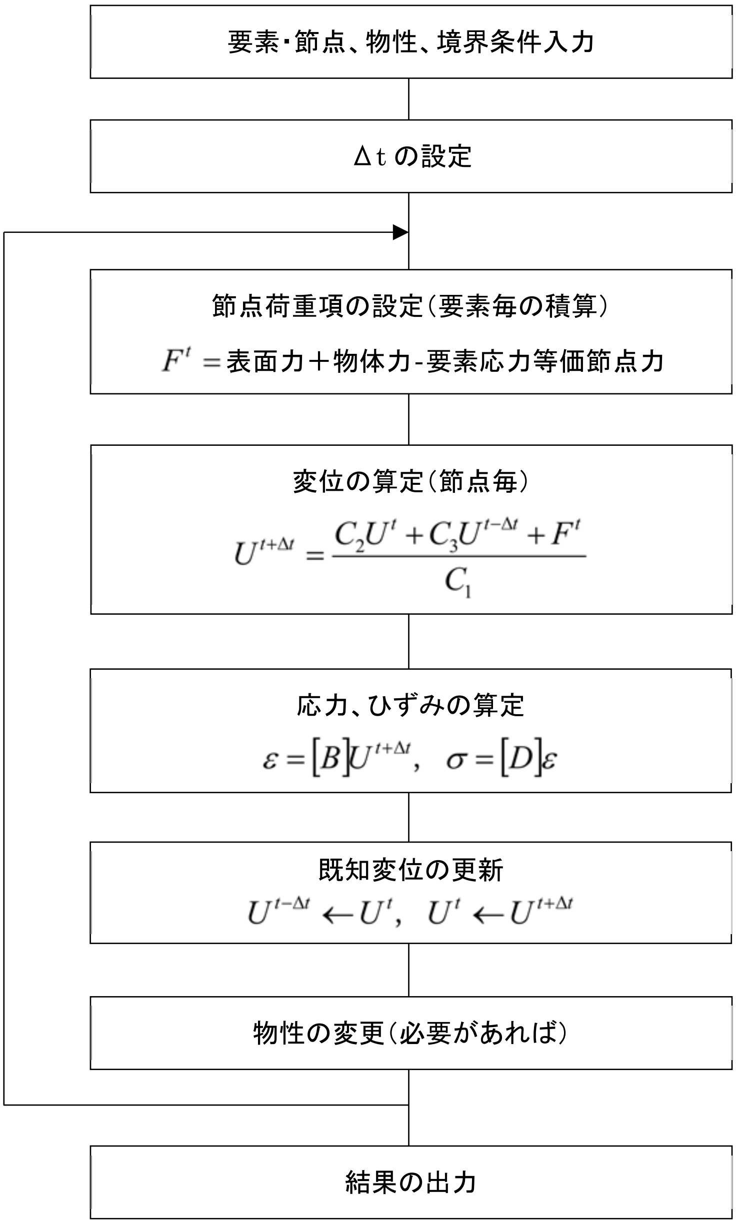

図-1　動的陽解法の計算フロー

4.　動的緩和法

動的緩和法では、動的陽解法で運動方程式を解きながら静的平衡を満たす解を求める。具体的には、解くべき運動方程式、

$$\left(\frac{\rho}{(\Delta t)^2}+\frac{c}{\Delta t}\right)u^{t+\Delta t}-\frac{2\rho}{(\Delta t)^2}u^t+\left(\frac{\rho}{(\Delta t)^2}-\frac{c}{\Delta t}\right)u^{t-\Delta t}+f^i-f^e=0 \tag{27}$$

に対し適切な減衰定数を与え、

$$u^{t+\Delta t}=u^t=u^{t-\Delta t} \tag{28}$$

となる収束値を求める。

このとき、

$$f^i-f^e=0 \tag{29}$$

となり、内外力が釣り合った際の解が得られる。

要素方程式で記述すると、次のとおりである。

$$\{F\}^t=\{F^s\}^t-\{F^i\}^t+\{F^b\}^t=0 \tag{30}$$

$$\sum_{e=1}^{E}\left(\int[N]^T[\sigma_s]dS\right)-\sum_{e=1}^{E}\left([K]\{U\}^t\right)+\sum_{e=1}^{E}\left(\int[N]^T\left[F^b\right]dV_e\right)=0 \tag{31}$$

$$[K]=\int[B]^T[D][B]dV_e \tag{32}$$

これは、離散化した静的平衡方程式の解に他ならない。

5. 動的緩和法における計算のフロー

動的緩和法における計算のフローは、次のとおりである。なお、時間の概念が無くなるため、t や Δt の代わりに繰り返し回数 n を用いた。

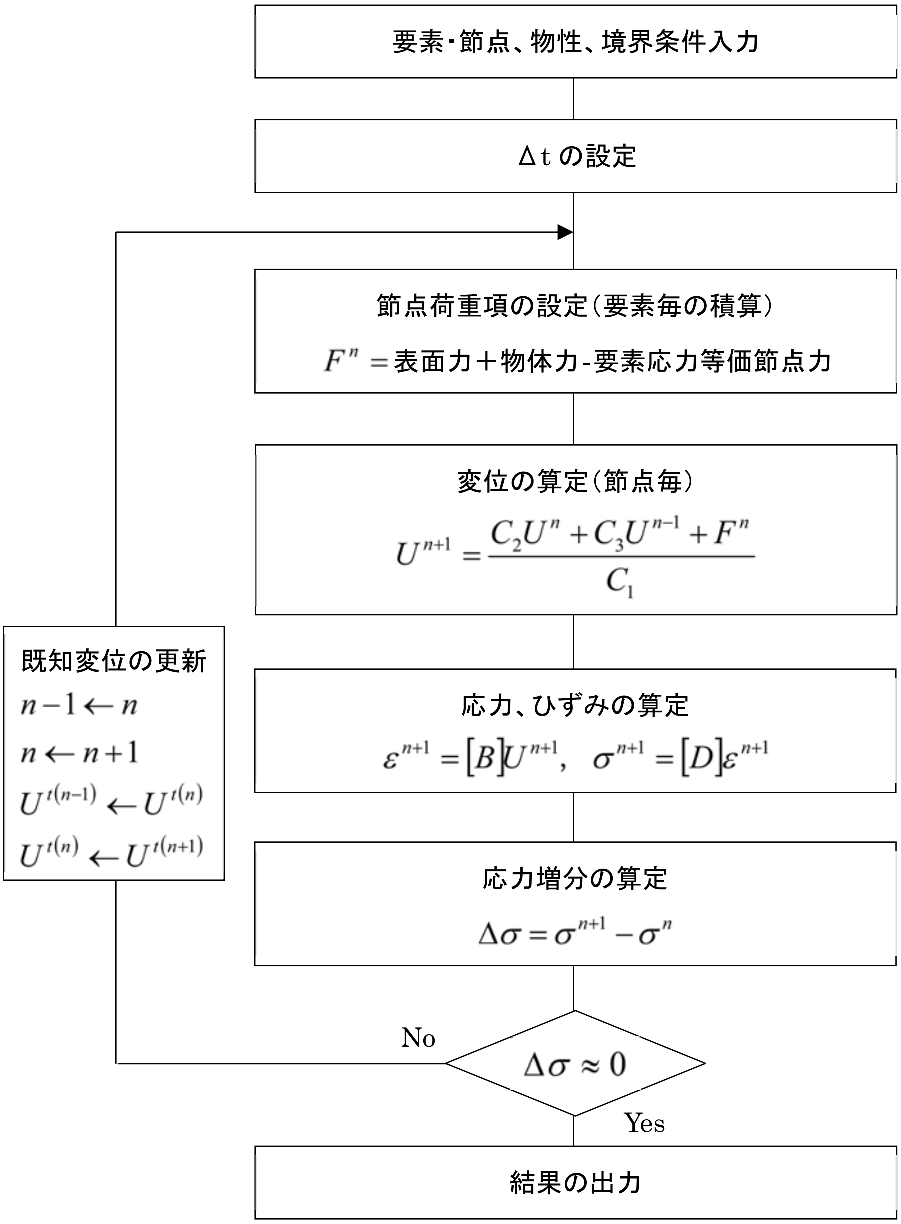

図-2　動的緩和法の計算フロー