

# 変形・地下水・熱の連成問題に関する支配方程式と陽解法

地層科学研究所

## 1. 支配方程式

### 1.1 地盤の変形

地盤の体積ひずみ  $\varepsilon_v$  は平均応力  $\sigma_m$  と間隙水圧  $\phi$  により変化する。なお、応力とひずみ、間隙水圧は圧縮を負とする。

$$\varepsilon_v = \frac{\sigma_m}{K} - \frac{\phi}{H} \quad (1)$$

$$\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3 \quad (2)$$

$$\varepsilon_v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (3)$$

式(1)は、全ての変形区間において定数  $K$ 、 $H$  が一定であることを前提として、区間増分を表す  $\Delta$  を用い次のように表される。

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta\sigma_m}{K} - \frac{\Delta\phi}{H} \quad (4)$$

ここに、 $K$  は排水条件 ( $\Delta\phi=0$ ) での等方応力載荷実験で得られる体積弾性定数であり、地盤の構造骨格の剛性を表す。

$$K = \frac{\Delta\sigma_m}{\Delta\varepsilon_v} \quad (5)$$

$H$  は平均応力変化が無い状態 ( $\Delta\sigma_m = 0$ ) で、間隙水圧を変化させた場合の体積ひずみの大きさを規定する実験定数である。

$$H = \frac{\Delta\phi}{\Delta\varepsilon_v} \quad (6)$$

$\alpha$  を次のように定義すれば、

$$\alpha = \frac{K}{H} \quad (7)$$

式(1)は以下のように記述できる。

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{\Delta\sigma_m}{K} - \frac{\alpha\Delta\phi}{K} \quad (8)$$

$$\Delta\sigma_m = K\Delta\varepsilon_v + \alpha\Delta\phi \quad (9)$$

あるいは、次式となる。

$$\sigma_m = K\varepsilon_v + \alpha\phi \quad (10)$$

式(10)はいわゆる有効応力則であり、 $\sigma_m$  は全応力とも呼ばれる。

特殊な状態として、平均応力と間隙水圧を同じ大きさで変化させた場合を考える。このような載荷状態を  $\Pi$  載荷と呼ぶこととする。このとき、体積ひずみの大きさは次のように表わすことができる。

$$\Delta\varepsilon_v = \left( \frac{1}{K} - \frac{\alpha}{K} \right) \Delta\phi^\Pi \quad (11)$$

このような状態で生ずる体積ひずみは、構造骨格を構成する粒子の変形に他ならない。したがって、粒子の体積弾性定数を  $K_s$  として、前式は次のように書くことができる。

$$\Delta\varepsilon_v = \frac{1}{K_s} \Delta\phi^\Pi \quad (12)$$

したがって、 $\alpha$  は次式で表すこともできる。

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \quad (13)$$

ここで、後の地下水流れの支配方程式の検討で必要となる、空隙率  $n$  の変化を考える。空隙率の変化は、体積ひずみから構成粒子の体積ひずみを差し引いたものである。

$$\Delta n = \Delta\varepsilon_v - \Delta\varepsilon_s \quad (14)$$

構成粒子の体積ひずみは、平均応力（全応力）に比例すると考える。

$$\Delta\varepsilon_s = \frac{1}{K_s} \Delta\sigma_m \quad (15)$$

このとき、空隙率の変化は次のように記述できる。

$$\begin{aligned} \Delta n &= \Delta\varepsilon_v - \frac{1}{K_s} \Delta\sigma_m \\ &= \Delta\varepsilon_v - \frac{K\Delta\varepsilon_v + \alpha\Delta\phi}{K_s} \\ &= \alpha\Delta\varepsilon_v \left( 1 - \frac{K}{K_s} \right) - \frac{\alpha\Delta\phi}{K_s} \\ &= \alpha\Delta\varepsilon_v - \frac{\alpha\Delta\phi}{K_s} \end{aligned} \quad (16)$$

他方、力のつり合いを表す平衡方程式は次式となる。

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad (17)$$

さらに、変位-ひずみ関係、

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (18)$$

を考慮すれば、最終的に解くべき方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{2} D_{ij} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \alpha \phi \right) + \rho g_i = 0 \quad (19)$$

ここに、 $D_{ij}$ は弾性定数マトリックスである。

## 1.2 地下水流れ

地下水流れでは、地下水の質量が保存されると考える。

$$\frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = - \frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} \quad (20)$$

ここに、 $\rho_w$ 、 $S_w$ はそれぞれ間隙水の密度と飽和度、 $n$ は地盤の空隙率である。また、 $v$ は間隙水の平均流速であり、ある断面より単位時間に流出（入）した間隙水の体積を、その断面積で除して求められる。

上式で、左辺は単位時間に単位体積中で生じた間隙水の流入出質量の差を表しており、右辺は、この流入出質量の差が地盤の空隙率の変化と間隙水の密度変化、及び飽和度の変化によって補われることを示している。

式(20)の右辺は、次のように分解することができる。

$$- \frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} = -nS_w \frac{\partial\rho_w}{\partial t} - n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_w \rho_w \frac{\partial n}{\partial t} \quad (21)$$

間隙水では間隙水圧を  $\phi$ 、体積を  $V$  とすると、質量が一定であることから、

$$d\rho_w = - \frac{\rho_w}{V} dV = -\rho_w d\varepsilon_w = -\rho_w \frac{1}{K_w} d\phi \quad (22)$$

が成り立つ。ここに、 $K_w$ は間隙水の体積弾性定数、 $\varepsilon_w$ は間隙水のひずみである。また、間隙水の熱膨張はここでは考慮しない。

したがって、式(21)は次のように表される。

$$- \frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} = \rho_w \frac{nS_w}{K_w} \frac{\partial\phi}{\partial t} - n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_w \rho_w \frac{\partial n}{\partial t} \quad (23)$$

上式の右辺第2項を、次のように書き換える。

$$n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} = n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (24)$$

ここに、 $\partial S_w / \partial\phi$ は比水分容量と呼ばれる物性値である。なお、ここでは間隙水圧は応力と同様に圧縮を負とするため、比水分容量を  $-\partial S_w / \partial\phi$  とすることで正の物性値となる。比水分容量の逆数は、飽和度の低下に伴って発生するサクシヨンの大きさを規定する。

式(23)は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} &= \rho_w \frac{nS_w}{K_w} \frac{\partial\phi}{\partial t} - n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial t} - S_w \rho_w \frac{\partial n}{\partial t} \\ &= \rho_w \left( \frac{nS_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} - S_w \rho_w \frac{\partial n}{\partial t} \end{aligned} \quad (24)$$

両辺は密度で除して体積変化に変換しておくこととする。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \left( \frac{nS_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} - S_w \frac{\partial n}{\partial t} \quad (25)$$

ここで、式(16)に示した空隙率の変化と体積ひずみの変化との関係を考慮すれば、

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \left( \frac{nS_w}{K_w} + \frac{\alpha}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} - S_w \alpha \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (26)$$

が得られる。

上式は、以下に示すとおり、飽和状態と不飽和状態に分けて記述する必要がある。

不飽和状態では、構造骨格や粒子の変形は間隙水圧に影響を及ぼさないと考えられることから、不飽和状態での支配方程式は次式となる。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \left( \frac{nS_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (27)$$

間隙水の剛性が大きいことから、右辺第1項は他の項に比べ十分小さく、これを無視して次式が得られる。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = -n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (28)$$

さらに、飽和度変化に対するサクシヨンの変化を規定する係数  $K_m$  を導入し次式を得る。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{K_m} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (29)$$

$$K_m = -\frac{1}{n} \frac{\partial\phi}{\partial S_w} \quad (30)$$

飽和状態では、飽和度の変化を含む項を省き記述することとする。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \left( \frac{n}{K_w} + \frac{\alpha}{K_s} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (31)$$

ここで、地盤での貯留性を表す定数  $M$  を導入する。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{M} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (32)$$

$M$  は、以下で示すように実験で得ることが可能な定数で表すことができる。まず、間隙水の出入りを禁止した非排水条件では、上式の左辺が0であることから、

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (33)$$

であるが、構成方程式(9)を考慮すれば次式となる。

$$\frac{1}{M} \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\alpha}{K} \left( \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad (34)$$

非排水条件で平均応力を加えた際に、発生した間隙水圧の割合を  $B$  とすると、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} / \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} = B \quad (35)$$

次式が得られる。

$$\frac{1}{M} = \frac{\alpha}{K} \left( \frac{1}{B} - \alpha \right) \quad (36)$$

$B$  はスケンプトンの  $B$  値とも呼ばれ、 $\alpha$ 、 $K$  とともに実験で求めることができる。

間隙水の平均流速に関しては、Darcy の法則が成り立つと仮定する。

$$v_i = -k_{ij} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \rho_w g \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \quad (37)$$

ここに、 $k_{ij}$  は間隙水の透水係数である。

### 1.3 熱の移動

地盤中を熱が移行する際には、熱量の保存則が満たされると考える。これは次のように表すことができる。

$$-C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + nS_w C_{vw} \frac{\partial (v_i^w T)}{\partial x_i} \quad (38)$$

ここに、 $T$  は地盤の温度、 $q$  は熱伝導による熱流束、 $C_v$  は地盤の単位体積あたりの熱容量（体積熱容量）、 $C_{vw}$  は間隙水の単位体積あたりの熱容量、 $v^w$  は間隙中の水の速度である。ただし、地盤と間隙水の温度は常に同じであると仮定する。

地盤の熱容量は次式でモデル化する。

$$C_v = C_{vd} + nS_w C_{vw} \quad (39)$$

ここに、 $C_{vd}$  は乾燥した地盤の単位体積あたりの熱容量である。

式(38)で、右辺第 1 項は熱伝導により単位時間に単位体積中で生じた熱量の流入出量の差を表しており、第 2 項は間隙水により運ばれることで同様に生じた熱量の流入出量の差を表している。また、左辺はこの熱量の変化が温度の変化をもたらすことを表している。

なお、間隙水の平均流速  $v$  と  $v^w$  には、次の関係がある。

$$v = nS_w v^w \quad (40)$$

したがって、式(38)は間隙水の平均流速を用いて書くことができ、

$$-C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + C_{vw} \frac{\partial(v_i T)}{\partial x_i} \quad (41)$$

さらに、次のように変形できる。

$$-C_v \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + C_{vw} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + C_{vw} T \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (42)$$

上式で、右辺第2項は間隙水の流れにより運搬された熱量であり、第3項は間隙水の流入出量の差によって生じた熱量の変化を表している。

熱伝導による熱流束は、Fourierの法則に従うものとする。

$$q_i = -\lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (43)$$

ここに、 $\lambda$ は地盤の熱伝導率である。

#### 1.4 凍結の取り扱い

いま、地盤の温度が $0^\circ\text{C}$ となり、さらに冷却によって単位時間に単位体積あたり $\Delta Q$ の熱量が奪われていく場合について考える。 $\Delta Q$ のうち $\mu$ の割合が潜熱 $Q_l$ により消費され、残りが温度変化に寄与すると仮定する。これは、地盤の構造骨格を介した熱移動と間隙水の凍結時の潜熱をモデル化したものである。このときの熱移動の支配方程式は次式となる。

$$-C_v \frac{\partial T}{\partial t} = (1-\mu) \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + C_{vw} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + C_{vw} T \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \quad (44)$$

あるいは、次のように書くことができる。

$$\Delta T = -(1-\mu) \Delta Q / C_v \quad (45)$$

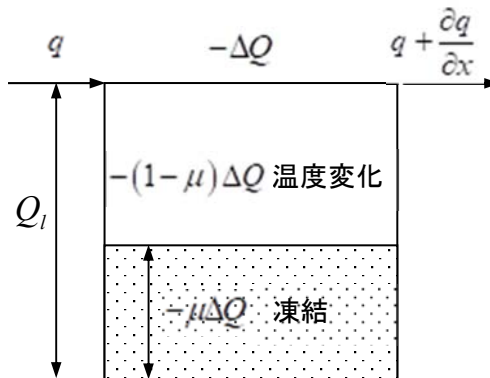


図-1 凍結時の熱量の配分

この変化が  $t_f$  時間継続し、凍結終了温度  $T_f$  まで温度が変化し、その後は潜熱の影響は無くなると考える。この間の温度変化は、次式で求められる。

$$T_f = -t_f(1-\mu)\Delta Q/C_v \quad (46)$$

一方、潜熱分が全て消費される時間は、次のとおりである。

$$t_f = -Q_l/\mu\Delta Q \quad (47)$$

これらの式より、潜熱に消費される割合  $\mu$  は次のように求められる。

$$\mu = \frac{Q_l}{T_f C_v + Q_l} \quad (48)$$

したがって、実験により  $T_f$  が求めることができれば、 $\mu$  を定めることができる。

なお、地盤の潜熱は水分量の変化を考慮し、次のように求められる。

$$Q_l = nS_w Q_{ls} \quad (49)$$

ここに、 $Q_{ls}$  は単位体積あたりの水の潜熱である。

凍結膨張ひずみ  $\varepsilon_f$  は、飽和時におけるその最大値  $\varepsilon_{f0}$  に対して、潜熱に消費された熱量と潜熱の割合で生ずることと仮定する。

$$\Delta\varepsilon_f = -S_w \varepsilon_{f0} \Delta Q \times \mu / Q_l \quad (50)$$

書き直すと次式となる。

$$\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial t} = \frac{S_w \varepsilon_{f0} \mu}{Q_l} \left( \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + C_{vw} v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + C_{vw} T \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) \quad (51)$$

凍結膨張ひずみの最大値は、空隙を満たしていた水の体積に凍結膨張率を乗じた体積と、出入りした水の体積に凍結膨張率を乗じた体積を加えた値とする。

$$\varepsilon_{f0} = n a_f + \zeta a_f \quad (52)$$

ここに、 $\zeta$  は凍結開始時間  $t_1$  から現在  $t$  までに流入（出）した間隙水の体積である。

$$\zeta = \int_{t_1}^t \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \quad (53)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} \quad (54)$$

凍結膨張ひずみも、凍結開始時間  $t_1$  から現在  $t$  までの累積量とし、これを初期ひずみとみなし、構成方程式に組み入れる。

$$\varepsilon_f = \int_{t_1}^t \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} dt \quad (55)$$

$$\sigma_m = K(\varepsilon_v - \varepsilon_f) + \alpha \phi \quad (56)$$

また、地下水流れの式に関しては、体積ひずみ変化がなければ凍結膨張により間隙水が押

し出されることから、式の右辺に凍結膨張ひずみを加える。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{M} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (57)$$

## 2. 離散化手法

### 2.1 Fourier 則の離散化と節点熱流束の算定

要素分割した領域に対して、内挿関数を重みとして式(58)に重み付き残差法を適用する。最初に、式(58)を次のように変形する。わかりやすくするため添え字は省略した。

$$\frac{q}{\lambda} = -\frac{\partial T}{\partial x} \quad (58)$$

上式に内挿関数を乗じ、対象領域で積分すると次式が得られる。ただし、積分は要素単位で行い節点で合算することとする。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \left( \frac{q'}{\lambda} \right) dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [\partial] T' dV_e \right) = 0 \quad (59)$$

ここに、 $[N]$ は内挿関数からなるマトリクス、 $[\partial]$ は空間での偏導関数マトリクスである。また、 $t$ は現在の時刻を表しており、後に示す時間差分では既知量として取り扱うことを示している。

熱流速と熱伝導率が節点で定義され、温度は要素内で一定とすれば、

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{q'}{\lambda} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [\partial] T' dV_e \right) = 0 \quad (60)$$

ここに、 $\{ \}$ は節点ベクトルである。変形すると次式となる。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{q'}{\lambda} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [\partial] [N]^T T' dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [\partial] [N]^T T' dV_e \right) = 0 \quad (61)$$

また、発散定理より上式は、

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{q'}{\lambda} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [\partial] [N]^T T' dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T T' dS_e \right) = 0 \quad (62)$$

となり、勾配マトリクス $[B]$ を用いると次式が得られる。



$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{q^t}{\lambda} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [B]^T T^t dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T T^t dS_e \right) = 0 \quad (63)$$

左辺第3項は、境界面の温度と等価な節点熱流束である。

左辺第1項を対角化すると、次式となる。

$$\sum_{e=1}^E \left( [W] \left\{ \frac{q^t}{\lambda} \right\} \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [B]^T T^t dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T T^t dS_e \right) = 0 \quad (64)$$

ここに、 $[W]$ は $\int [N]^T [N] dV_e$ を対角化したマトリクスである。例えば、2次元の三角形要素で内挿関数が1次の、いわゆる定ひずみ要素では、

$$[W] = \frac{V_e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (65)$$

である。

要素単位での合算が終わった状態では、次のような形となる。

$$[W] \left\{ \frac{q^t}{\lambda} \right\} + \{Q_e^t\} - \{Q_s^t\} = 0 \quad (66)$$

ここに、 $\{Q_e^t\}$ は各節点における等価温度勾配、 $\{Q_s^t\}$ は境界面の温度と等価な節点温度勾配である。

左辺第1項の係数は対角マトリクスであることから、式(66)は節点ごとの並列式となり、各節点での割り算により節点熱流束を求めることができる。

$$q^t = \lambda \frac{-Q_e^t + Q_s^t}{W} \quad (67)$$

なお、熱伝導率は要素の物性として定める。節点での熱伝導率は、節点の周囲の要素について熱伝導率の逆数の要素体積の重み付き平均を求め、この逆数をもって節点値とする。

$$\lambda = \frac{1}{\sum_{e=1}^m \frac{V_e}{\lambda_e} / \sum_{e=1}^m V_e} \quad (68)$$

ここに、 $m$ は節点の周りの要素の数、 $\lambda_e$ は要素の熱伝導率である。

## 2.2 節点温度勾配の算定

式(42)に示す保存則を解くためには、温度勾配が必要となる。 $\theta$ を温度勾配として、次式

を重み付き残差法により離散化する。

$$\theta_i = \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (69)$$

上式に内挿関数を乗じ、対象領域で積分すると次式が得られる。ただし、積分は要素単位で行い節点で合算することとする。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \theta^t dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [\partial] T^t dV_e \right) = 0 \quad (70)$$

式(60)から式(66)と同様の手続きを踏むことで、それぞれの節点での値が求まる。

$$\theta^t = \frac{-Q_e^t + Q_s^t}{W} \quad (71)$$

### 2.3 Darcy 則の離散化と節点水流速の算定

要素分割した領域に対して、内挿関数を重みとして式(37)に重み付き残差法を適用する。なお、説明を簡単にするため右辺第2項は省くこととする。また、わかりやすくするため添え字は省略した。

最初に、式(37)を次のように変形する。

$$\frac{v}{k} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (72)$$

上式に内挿関数を乗じ、対象領域で積分すると次式が得られる。ただし、積分は要素単位で行い節点で合算することとする。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \left( \frac{v^t}{k} \right) dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [\partial] \phi^t dV_e \right) = 0 \quad (73)$$

式(60)から式(66)と同様な手続きを踏み、要素単位での合算が終わった状態では、式(73)は次のような形となる。

$$[W] \left\{ \frac{v^t}{k} \right\} + \{F_e^t\} - \{F_s^t\} = 0 \quad (74)$$

ここに、 $\{F_e^t\}$ は各節点における等価水圧勾配、 $\{F_s^t\}$ は境界面の水圧と等価な節点水圧勾配である。

左辺第1項の係数は対角マトリクスであることから、式(74)は節点ごとの並列式となり、各節点での割り算によりそれぞれの節点における流速を求めることができる。

$$v^t = k \frac{-F_e^t + F_s^t}{W} \quad (75)$$

なお、透水係数は要素の物性として定めることとする。このため、節点での透水係数は、節点の周囲の要素について透水係数の逆数の要素体積の重み付き平均を求め、この逆数をもって節点値とする。

$$k = \frac{1}{\sum_{e=1}^m \frac{V_e}{k_e} / \sum_{e=1}^m V_e} \quad (76)$$

ここに、 $m$  は節点の周りの要素の数、 $k_e$  は要素の透水係数である。

## 2.4 要素温度と凍結ひずみの算定

式(38)の熱伝導方程式では、要素内の熱流速の勾配は内挿関数を用いて節点値から求め、時間微分は差分で近似する。

$$\frac{(T^{t+\Delta t} - T^t)}{\Delta t} = -\frac{1}{C_v} \left( [\partial][N]\{q^t\} + C_{vw}\{v^t\theta^t\} + C_{vw}T^t[\partial][N]\{v^t\} \right) \quad (77)$$

あるいは、

$$\frac{(T^{t+\Delta t} - T^t)}{\Delta t} = -\frac{1}{C_v} \left( [B]\{q^t\} + C_{vw}\{v^t\theta^t\} + C_{vw}T^t[B]\{v^t\} \right) \quad (78)$$

したがって、既知の値から次の時間の温度を求めることができる。

$$T^{t+\Delta t} = -\frac{1}{C_v} \left( [B]\{q^t\} + C_{vw}\{v^t\theta^t\} + C_{vw}T^t[B]\{v^t\} \right) \Delta t + T^t \quad (79)$$

ただし、温度が 0°C から凍結終了温度までは潜熱の影響を考慮する。

$$T^{t+\Delta t} = -\frac{(1-\mu)}{C_v} \left( [B]\{q^t\} + C_{vw}\{v^t\theta^t\} + C_{vw}T^t[B]\{v^t\} \right) \Delta t + T^t \quad (80)$$

式(51)に示す凍結ひずみも同様であり、次のようにして既知の値より求めることができる。

$$\varepsilon_f^{t+\Delta t} = \frac{S_w \varepsilon_{f0} \mu}{Q_l C_v} \left( [B]\{q^t\} + C_{vw}\{v^t\theta^t\} + C_{vw}T^t[B]\{v^t\} \right) \Delta t + \varepsilon_f^t \quad (81)$$

## 2.5 要素応力・ひずみ・間隙水圧の算定

式(32)の地下水流れの方程式においても、要素内の流速の勾配は内挿関数を用いて節点値から求め、時間微分は差分で近似する。

$$\frac{1}{\rho_w^t} [\partial][N]\{\rho_{w,nod}^t v^t\} = \frac{1}{M} \frac{(\phi^{t+\Delta t} - \phi^t)}{\Delta t} - \alpha \frac{(\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t)}{\Delta t} \quad (82)$$

あるいは、

$$\frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} = \frac{1}{M} \frac{(\phi^{t+\Delta t} - \phi^t)}{\Delta t} - \alpha \frac{(\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t)}{\Delta t} \quad (83)$$

ここに、 $\rho_{w,nod}$  は節点での密度であり、節点を囲む要素の値を要素体積の重みを付けて平均した値とする。

$$\rho_{w,nod} = \frac{\sum_{e=1}^m V_e \rho_w^e}{\sum_{e=1}^m V_e} \quad (84)$$

なお、間隙水の密度は  $K_w$  が一定と近似して次のようにして求めることとする。

$$\rho_w^t = \rho_{w0} + \Delta \rho_w = \rho_{w0} \left( 1 - \frac{1}{K_w} (\phi^t - \phi_0) \right) \quad (85)$$

ここに、 $\rho_{w0}$ 、 $\phi_0$  は、それぞれ  $t=0$  のときの間隙水の密度、間隙水圧である。

式(61)を変形すると次式となる。

$$\phi^{t+\Delta t} = M \left( \frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} \right) \Delta t + \alpha (\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t) + \phi^t \quad (86)$$

上式と構成方程式を併せて解くことによって、各時刻の値を得ることができる。

$$\sigma_m^{t+\Delta t} = K (\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_f^{t+\Delta t}) + \alpha \phi^{t+\Delta t} \quad (87)$$

計算方法はつぎのとおりである。まず、式(64)を二つに分ける。

$$\phi^{t+\Delta t} = \Delta \phi_a + \Delta \phi_b + \phi^t \quad (88)$$

$$\Delta \phi_a = \alpha M (\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t) \quad (89)$$

$$\Delta \phi_b = M \left( \frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} \right) \Delta t \quad (90)$$

$\Delta \phi_a$  は地盤の変形によってもたらされた間隙水圧変化であり、 $\Delta \phi_b$  は水の流れや温度変化によってもたらされる間隙水圧変化である。言い換えれば、水の流れや温度変化を発生させないで地盤を変形させた場合は  $\Delta \phi_a$  の間隙水圧変化が生じ、変形を拘束して水の流れや温度変化を生じさせた場合は  $\Delta \phi_b$  の間隙水圧変化が生ずることとなる。そこで、水の流れや温度変化を発生させないステップと、変形を拘束して水を流し温度を変化させるステップに分けて計算することとする。

水の流れを発生させないステップでは、式(87)と式(89)を動的緩和法で解く。水の流れを考慮しないため、時刻を  $t$  に固定して（時間に係わらず）計算することとなる。動的緩和法における  $n$  回目の繰り返し計算では、式(91)の応力を内力として計算を進め、変形からひず

みが求まる。

$$\sigma_m^{t(n)} = K_d \left( \varepsilon_v^{t(n)} - \varepsilon_f^t \right) + \alpha \phi^{t(n)} \quad (91)$$

$$\varepsilon_v^{t(n+1)} = [B] U^{t(n+1)} \quad (92)$$

なお、式(81)に示したとおり凍結ひずみは別途求められていることから、 $\varepsilon_f$ は既知項として取り扱うことができる。

$$\varepsilon_f^t = \frac{S_w \varepsilon_{f0} \mu}{Q_l C_v} \left( [B] \{q^{t-1}\} + C_{vw} \{v^{t-1} \theta^{t-1}\} + C_{vw} T^{t-1} [B] \{v^{t-1}\} \right) \Delta t + \varepsilon_f^{t-1} \quad (93)$$

次に、式(89)からひずみ変化に伴う間隙水圧変化を求める。時間を止めているが、動的緩和法の計算過程で発生したひずみ変化に対しても式(89)は適用される。

$$\Delta \phi_a = \alpha M \left( \varepsilon_v^{t(n+1)} - \varepsilon_v^{t(n)} \right) \quad (94)$$

間隙水圧を更新し、再度繰り返し計算を行い、

$$\phi^{t(n+1)} = \Delta \phi_a + \phi^{t(n)} \quad (95)$$

$$\sigma_m^{t(n+1)} = K \left( \varepsilon_v^{t(n+1)} - \varepsilon_{vi}^t \right) + \alpha \phi^{t(n+1)} \quad (96)$$

応力の変化が十分小さくなった段階で時刻  $t$  の解とする。

続いて、変形を拘束して水を流し温度を変化させるステップの計算を行う。この場合は、時刻  $t$  の間隙水圧をもとに、時刻が  $\Delta t$  進んだ後の間隙水圧変化を求める。

$$T^{t+\Delta t} = -\frac{1}{C_v} \left( [B] \{q^t\} + C_{vw} \{v^t \theta^t\} + C_{vw} T^t [B] \{v^t\} \right) \Delta t + T^t \quad (97)$$

$$\Delta \phi_b = K \left( \frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} \right) \Delta t \quad (98)$$

$$\phi^{t+\Delta t} = \Delta \phi_b + \phi^t \quad (99)$$

得られた間隙水圧変化を式(87)に加え動的緩和法を適用することにより、時刻  $t+\Delta t$  における応力やひずみ、間隙水圧が求められる。計算のフローを以下に示す。

### 3. 計算フロー

陽解法による変形・地下水・熱の連成解析の計算フローは、次のとおりである。

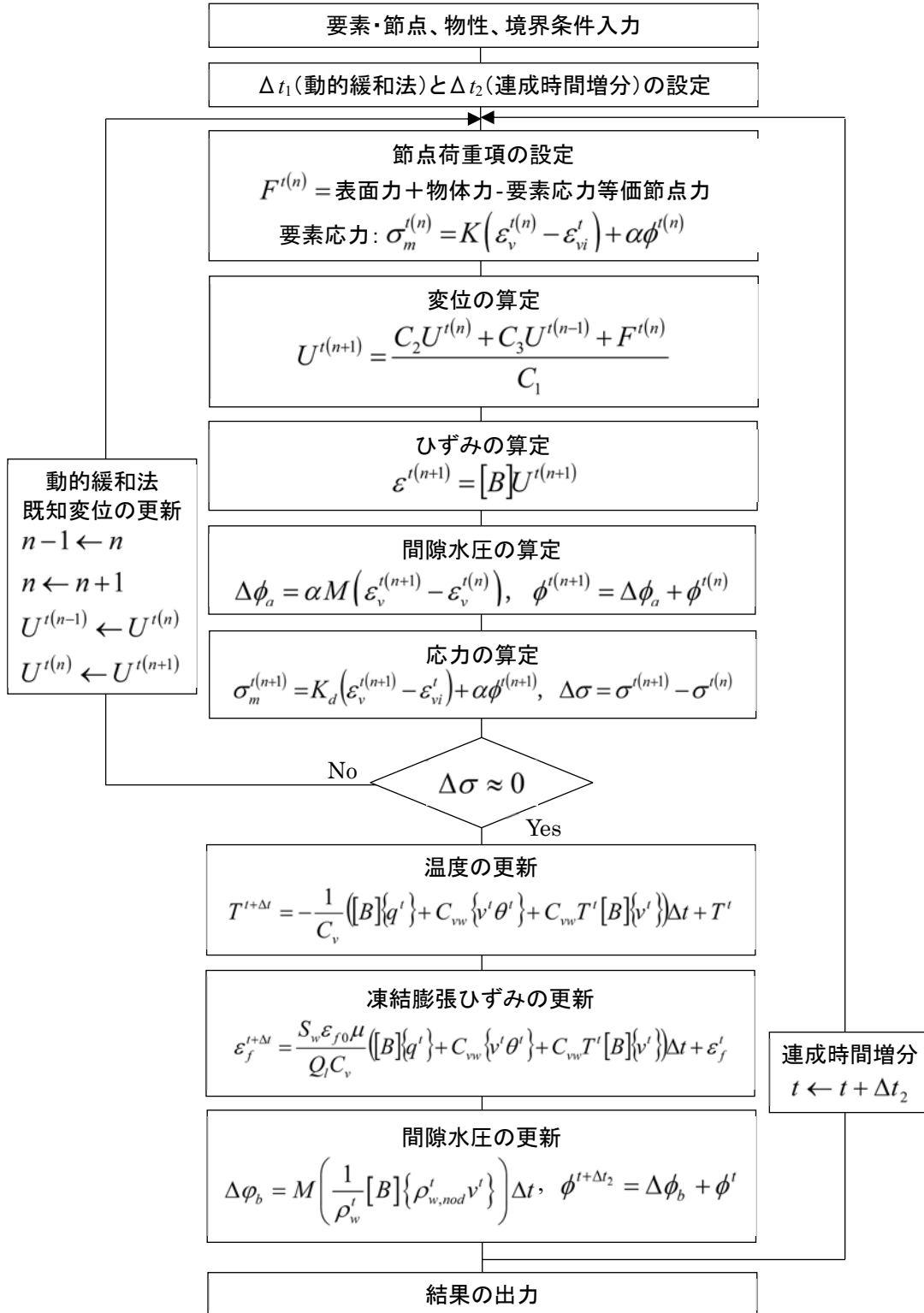


図-2 変形・地下水・熱の連成問題の陽解法における計算フロー