

# 変形と地下水流れの連成問題に関する支配方程式と陽解法

地層科学研究所

## 1. 支配方程式

### 1.1 地下水流れの支配方程式

地下水流れの支配方程式は次のとおりである。

$$\frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = -\frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} \quad (1)$$

ここに、 $\rho_w$ 、 $v$ 、 $S_w$ 、 $n$  はそれぞれ間隙水の密度、平均流速、飽和度、地盤の空隙率である。

式(1)の右辺は、次のように分解することができる。

$$-\frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} = -nS_w \frac{\partial\rho_w}{\partial t} - n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_w\rho_w \frac{\partial n}{\partial t} \quad (2)$$

間隙水では間隙水圧を  $\phi$ 、体積を  $V$  とすると、質量が一定であることから、

$$d\rho_w = -\frac{\rho_w}{V} dV = -\rho_w d\varepsilon_w = -\rho_w \frac{1}{K_w} d\phi \quad (3)$$

が成り立つ。ここに、 $K_w$  は間隙水の体積弾性定数、 $\varepsilon_w$  は間隙水のひずみである。

したがって、式(2)は次のように書くことができる。

$$-\frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} = \rho_w \frac{nS_w}{K_w} \frac{\partial\phi}{\partial t} - n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_w\rho_w \frac{\partial n}{\partial t} \quad (4)$$

さらに、地盤の構成粒子の体積弾性定数が極めて大きいと仮定すると、空隙率の変化は地盤の体積ひずみ変化  $\varepsilon_v$  として計測される。したがって、

$$-\frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} = \rho_w \frac{nS_w}{K_w} \frac{\partial\phi}{\partial t} - n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} - S_w\rho_w \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \quad (5)$$

上式で、右辺第2項を次のように書き換える。

$$n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial t} = n\rho_w \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (6)$$

ここに、 $\partial S_w / \partial\phi$  は比水分容量と呼ばれる物性値である。なお、ここでは間隙水圧は応力と同様に圧縮を負とするため、比水分容量を  $-\partial S_w / \partial\phi$  とすることで正の物性値となる。

式(4)は、次のように書き換えることができる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial(n\rho_w S_w)}{\partial t} &= \rho_w \frac{nS_w}{K_w} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \rho_w n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \frac{\partial\phi}{\partial t} - S_w\rho_w \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \\ &= \rho_w \left( \frac{nS_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial\phi} \right) \frac{\partial\phi}{\partial t} - S_w\rho_w \frac{\partial\varepsilon_v}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

最終的に、式(1)は次のようになる。なお、両辺は密度で除して体積変化に変換しておく

こととする。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \left( \frac{nS_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial \phi} \right) \frac{\partial \phi}{\partial t} - S_w \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (8)$$

右辺第1項の係数を $1/K_b$ と書けば、次式が得られる。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{K_b} \frac{\partial \phi}{\partial t} - S_w \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{1}{K_b} = \frac{nS_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial \phi} \quad (10)$$

ここに、 $K_b$ は空隙弾性定数であり、水の入出量差によって生じた体積変化に対する間隙水圧変化を定める。

また、不飽和領域では空隙率変化が間隙水圧変化に影響を及ぼさないと考えられることから、飽和領域で1、不飽和領域で0となる係数 $\alpha$ を用いて式(9)を書き直す。

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{K_b} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \alpha \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (11)$$

他方、間隙水の平均流速に関しては、Darcyの法則が成り立つものとする。

$$v_i = -k_{ij} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \rho_w g \frac{\partial x_3}{\partial x_j} \right) \quad (12)$$

ここに、 $k_{ij}$ は地盤の透水係数である。

## 1.2 構成方程式

地盤では、いわゆる有効応力則にしたがって変形が生ずると考える。

$$\sigma_m = K_d \varepsilon_v + \alpha \phi \quad (13)$$

ここに、 $\sigma_m$ は平均応力、 $K_d$ は排水条件で計測された地盤の体積弾性定数である。

### 1.3 $K_b$ の求め方

支配方程式に現れる物性値のうち、空隙弾性定数  $K_b$  は直接実験で求めることができないが、次のようにして試験結果に基づき値を定めることができる。

非排水、飽和条件下で等方三軸圧縮試験を行い、このときの間隙水圧が計測され、平均応力増加に対する間隙水圧の増加比率  $\beta$  が求められたとする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \beta \frac{\partial \sigma_m}{\partial t} \quad (14)$$

他方、式(11)からは飽和で非排水条件であることを考慮して次式が得られ、

$$\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial(\rho_w v_i)}{\partial x_i} = \frac{1}{K_b} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} = 0 \quad (15)$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial t} = K_b \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (16)$$

また、構成方程式より次式が得られる。

$$\frac{\partial \sigma_m}{\partial t} = K_d \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (17)$$

式(14)を式(17)に代入すると次式となり、

$$\frac{1}{\beta} \frac{\partial \phi}{\partial t} = K_d \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\beta}{1-\beta} K_d \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \quad (19)$$

式(16)と式(19)の係数を比較すると、次の関係があることがわかる。

$$K_b = \frac{\beta}{1-\beta} K_d \quad (20)$$

このように、空隙弾性定数  $K_b$  は、排水条件下での三軸圧縮試験で求められた体積弾性定数  $K_d$  と、非排水条件下での等方三軸圧縮試験で求められた、平均応力増加に対する間隙水圧の増加比率  $\beta$  より求めることができる。

## 2. 離散化手法

### 2.1 Darcy 則の離散化と節点水流速の算定

要素分割した領域に対して、内挿関数を重みとして式(16)にガラーキン法を適用する。なお、説明を簡単にするため右辺第 2 項は省くこととする。また、わかりやすくするため添え字は省略した。

最初に、式(16)を次のように変形する。

$$\frac{v}{k} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (17)$$

上式に内挿関数を乗じ、対象領域で積分すると次式が得られる。ただし、積分は要素単位で行い節点で合算することとする。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \left( \frac{v'}{k} \right) dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [\partial] \phi' dV_e \right) = 0 \quad (18)$$

ここに、 $[N]$ は内挿関数からなるマトリクス、 $[\partial]$ は空間での偏導関数マトリクスである。また、 $t$ は現在の時刻を表しており、後に示す時間差分では既知量として取り扱うことを示している。

流速と透水係数が節点で定義され、間隙水圧は要素内で一定とすれば、

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{v'}{k} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [\partial] \phi' dV_e \right) = 0 \quad (19)$$

ここに、 $\{ \}$ は節点ベクトルである。変形すると次式となる。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{v'}{k} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [\partial] [N]^T \phi' dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [\partial] [N]^T \phi' dS_e \right) = 0 \quad (20)$$

また、発散定理より上式は、

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{v'}{k} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [\partial] [N]^T \phi' dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \phi' dS_e \right) = 0 \quad (21)$$

となり、勾配マトリクス $[B]$ を用いると次式が得られる。

$$\sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T [N] \left\{ \frac{v'}{k} \right\} dV_e \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [B]^T \phi' dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \phi' dS_e \right) = 0 \quad (22)$$

左辺第 3 項は、境界面の水圧と等価な節点流速である。

左辺第 1 項を対角化すると、

$$\sum_{e=1}^E \left( [W] \left\{ \begin{matrix} v^t \\ k \end{matrix} \right\} \right) + \sum_{e=1}^E \left( \int [B]^T \phi^t dV_e \right) - \sum_{e=1}^E \left( \int [N]^T \phi^t dS_e \right) = 0 \quad (23)$$

ここに、 $[W]$ は  $\int [N]^T [N] dV_e$  を対角化したマトリクスである。例えば、2次元の三角形要素で内挿関数が 1 次の要素では次のようになる。

$$[W] = \frac{V_e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (24)$$

要素単位での合算が終わった状態では、式(23)は次のような形となる。

$$[W] \left\{ \begin{matrix} v^t \\ k \end{matrix} \right\} + \{F_e^t\} - \{F_s^t\} = 0 \quad (25)$$

ここに、 $\{F_e^t\}$ は各節点における等価水圧勾配、 $\{F_s^t\}$ は境界面の水圧と等価な節点水圧勾配である。

左辺第 1 項の係数は対角マトリクスであることから、式(25)は節点ごとの並列式となり、各節点での割り算によりそれぞれの節点における流速を求めることができる。

$$v^t = k \frac{-F_e^t + F_s^t}{W} \quad (26)$$

なお、透水係数は要素の物性として定めることとする。このため、節点での透水係数は、節点の周囲の要素について透水係数の逆数の要素体積の重み付き平均を求め、この逆数をもって節点値とする。

$$k = \frac{1}{\sum_{e=1}^m \frac{V_e}{k_e} / \sum_{e=1}^m V_e} \quad (27)$$

ここに、 $m$ は節点の周りの要素の数、 $k_e$ は要素の透水係数である。

## 2.2 要素応力・ひずみ・間隙水圧の算定

式(11)の方程式において、要素内の流速の勾配は内挿関数を用いて節点値から求め、時間微分は差分で近似する。

$$\frac{1}{\rho_w^t} [c][N] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} = \frac{1}{K_b} \frac{(\phi^{t+\Delta t} - \phi^t)}{\Delta t} - \alpha \frac{(\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t)}{\Delta t} \quad (21)$$

あるいは、

$$\frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} = \frac{1}{K_b} \frac{(\phi^{t+\Delta t} - \phi^t)}{\Delta t} - \alpha \frac{(\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t)}{\Delta t} \quad (22)$$

ここに、 $\rho_{w,nod}$  は節点での密度であり、節点を囲む要素の値を要素体積の重みを付けて平均した値とする。

$$\rho_{w,nod} = \frac{\sum_{e=1}^m V_e \rho_w^e}{\sum_{e=1}^m V_e} \quad (23)$$

なお、間隙水の密度は  $K_w$  が一定と近似して次のようにして求めることとする。

$$\rho_w^t = \rho_{w0} + \Delta \rho_w = \rho_{w0} \left( 1 - \frac{1}{K_w} (\phi^t - \phi_0) \right) \quad (24)$$

ここに、 $\rho_{w0}$ 、 $\phi_0$  は、それぞれ  $t=0$  のときの間隙水の密度、間隙水圧である。

式(22)を変形すると次式となる。

$$\phi^{t+\Delta t} = K_b \left( \frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} \right) \Delta t + \alpha K_b (\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t) + \phi^t \quad (25)$$

上式と構成方程式を併せて解くことによって、各時刻におけるそれぞれの値を得ることができる。

$$\sigma_m^{t+\Delta t} = K_d \varepsilon_v^{t+\Delta t} + \alpha \phi^{t+\Delta t} \quad (26)$$

計算方法はつぎのとおりである。まず、式(25)を二つに分ける。

$$\phi^{t+\Delta t} = \Delta \phi_a + \Delta \phi_b + \phi^t \quad (27)$$

$$\Delta \phi_a = \alpha K_b (\varepsilon_v^{t+\Delta t} - \varepsilon_v^t) \quad (28)$$

$$\Delta \phi_b = K_b \left( \frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} \right) \Delta t \quad (29)$$

$\Delta \phi_a$  は地盤の変形によってもたらされた間隙水圧変化であり、 $\Delta \phi_b$  は水の移動によってもたらされる間隙水圧変化である。言い換えれば、水の流れを発生させないで地盤を変形させた場合は  $\Delta \phi_a$  の間隙水圧変化が生じ、変形を拘束して水の流れを生じさせた場合は  $\Delta \phi_b$  の間隙水圧変化が生ずることとなる。そこで、水の流れを発生させないステップと変形を拘束して水を流すステップに分けて計算することとする。

水の流れを発生させないステップでは、式(26)と式(28)を動的緩和法で解く。水の流れを考慮しないため、時刻を  $t$  に固定して（時間に係わらず）計算することとなる。動的緩和法における  $n$  回目の繰り返し計算では、式(26)の応力を内力として計算を進め、変形からひずみが求まる。

$$\sigma_m^{t(n)} = K_d \varepsilon_v^{t(n)} + \alpha \phi^{t(n)} \quad (30)$$

$$\varepsilon_v^{t(n+1)} = [B]U^{t(n+1)} \quad (31)$$

次に、式(28)からひずみ変化に伴う間隙水圧変化を求める。時間を止めているが、動的緩和法の計算過程で発生したひずみ変化に対しても式(28)は適用される。

$$\Delta \phi_a = \alpha K_b (\varepsilon_v^{t(n+1)} - \varepsilon_v^{t(n)}) \quad (32)$$

間隙水圧を更新し、再度繰り返し計算を行い、

$$\phi^{t(n+1)} = \Delta \phi_a + \phi^{t(n)} \quad (33)$$

$$\sigma_m^{t(n+1)} = K_d \varepsilon_v^{t(n+1)} + \alpha \phi^{t(n+1)} \quad (34)$$

応力の変化が十分小さくなった段階で時刻  $t$  の解とする。

続いて、変形を拘束して水を流すステップの計算を行う。この場合は、時刻  $t$  の間隙水圧をもとに、時刻が  $\Delta t$  進んだ後の間隙水圧変化を求める。

$$\Delta \phi_b = K_b \left( \frac{1}{\rho_w^t} [B] \{ \rho_{w,nod}^t v^t \} \right) \Delta t \quad (35)$$

$$\phi^{t+\Delta t} = \Delta \phi_b + \phi^t \quad (36)$$

得られた間隙水圧変化を式(26)に加え動的緩和法を適用することにより、時刻  $t+\Delta t$  における応力やひずみ、間隙水圧が求められる。計算のフローを以下に示す。

### 3. 計算フロー

陽解法による変形と地下水流れの連成解析の計算フローは、次のとおりである。

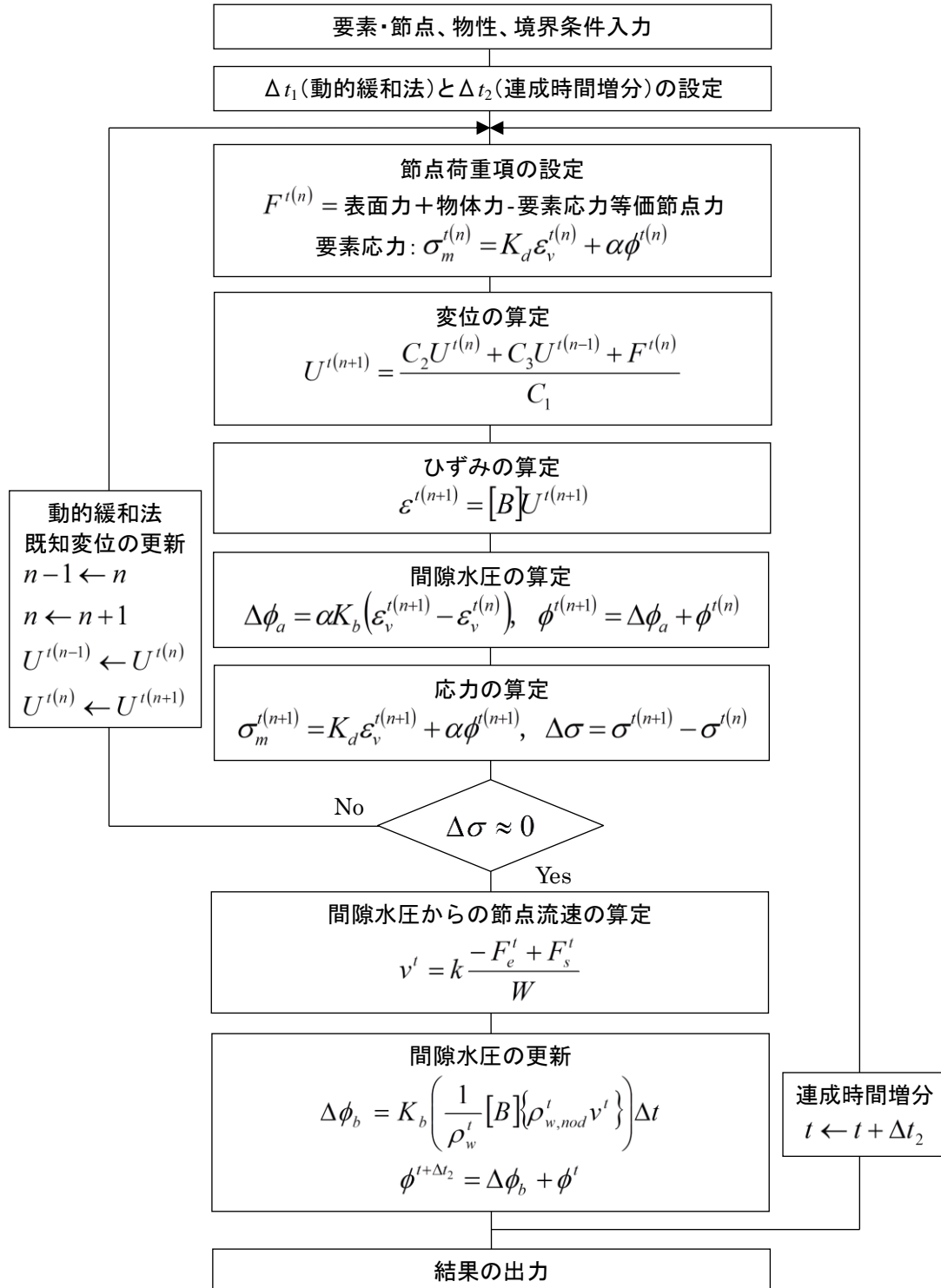


図-1 変形と地下水流れの連成問題の陽解法における計算フロー



動的問題として解析を行う場合は、次の計算フローとなる。

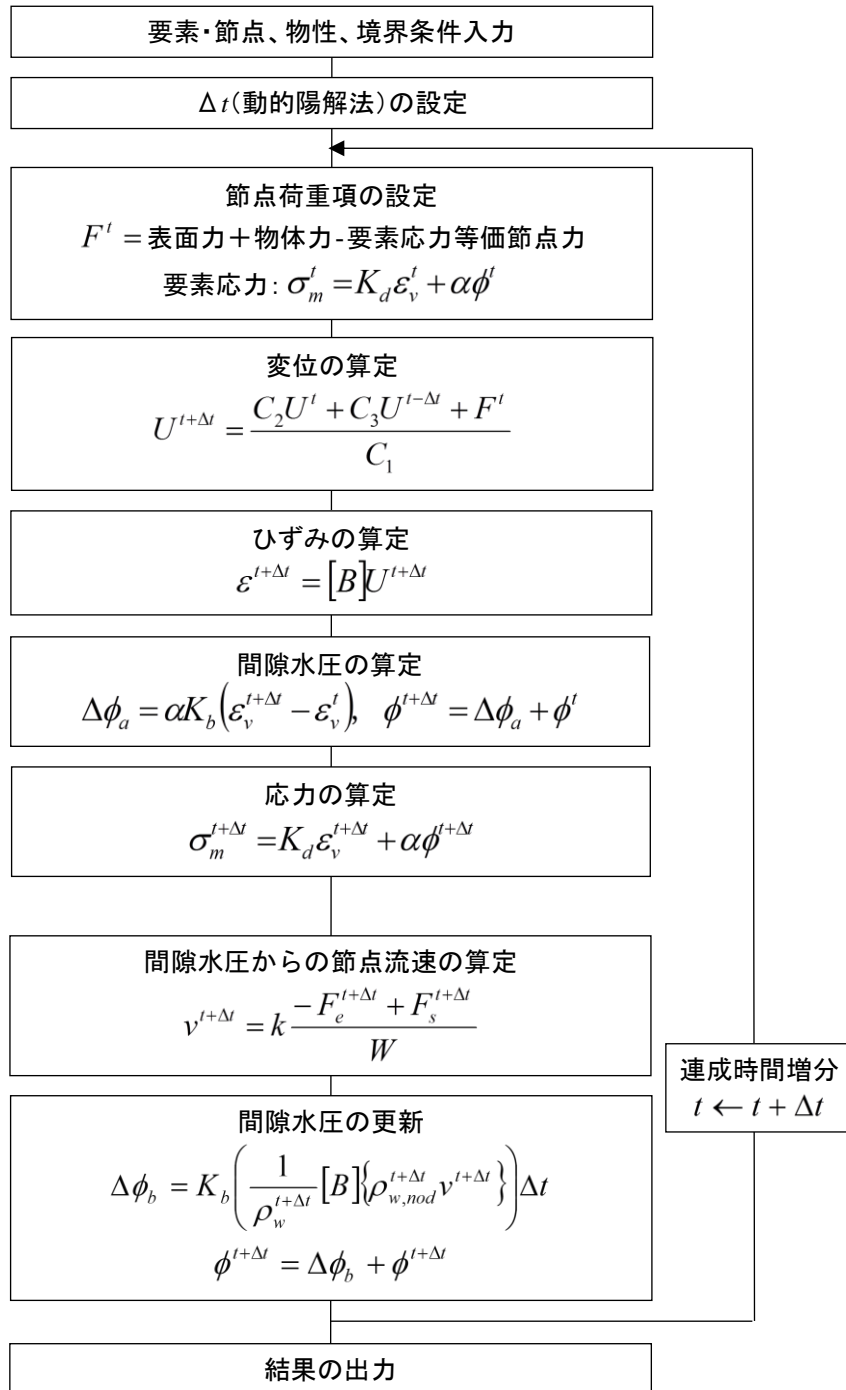


図-2 変形と地下水流れの連成問題の陽解法における計算フロー