Geoscience Research Laboratory Co., Ltd.
Technical Report

TR No.47_1

カルマンフィルタを用いた3次元有限要素法による逆解析（１）

一般の変形や地下水流れの問題では、地盤や岩盤の剛性や透水性などを既知として与え、加えた外乱による変化を求めます。逆解析では、観測された変形や地下水位変化より剛性や透水性などを推定します。ここでは、安定した収束性が期待できるカルマンフィルタを３次元有限要素法と組み合わせた手法を紹介します。

カルマンフィルタとは

k 回目の観測において、観測値 $\boldsymbol{y}_k$ が状態 $\boldsymbol{x}_k$ と次のような関係があり、また状態は次のような変動をするものとします（状態空間モデル）。

（観測方程式）

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{v}_k$$

（状態方程式）

$$\boldsymbol{x}_{k+1} = \boldsymbol{x}_k + \boldsymbol{w}_k$$

ここに、$\boldsymbol{A}_k$ は観測行列、$\boldsymbol{v}_k$ は観測ノイズ、$\boldsymbol{w}_k$ はシステムノイズとします。

これらの条件の下で、状態の推定量 $\boldsymbol{x}_k$ を算出するカルマンフィルタは次のようになります。

（フィルタ方程式）

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_{k-1} \right)$$

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{M}_k \boldsymbol{A}_k^T \left(\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{M}_k \boldsymbol{A}_k^T + \boldsymbol{R}_k \right)^{-1}, \quad \boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{P}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_{k-1}, \quad \boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{M}_k - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{M}_k$$

（初期条件）

$$\boldsymbol{x}_0 = \overline{\boldsymbol{x}}_0, \quad \boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{\Sigma}_0$$

ここに、$\boldsymbol{K}_k$ はカルマンゲイン、$\boldsymbol{P}_k$ は予測誤差共分散行列、$\boldsymbol{R}_k$ は観測ノイズの共分散行列、$\boldsymbol{Q}_k$ はシステムノイズの共分散行列、$\boldsymbol{M}_k$ は状態の予測誤差共分散とします。また、$\boldsymbol{\Sigma}_0$ は状態の初期値 $\overline{\boldsymbol{x}}_0$ の共分散とします。

変形問題に関するカルマンフィルタと有限要素法の組み合わせ

変形問題では有限要素方程式が次のような形をとります、

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$$

ここに、$\boldsymbol{F}$ は荷重ベクトル、$\boldsymbol{u}$ は変位ベクトル、$\boldsymbol{K}$ は剛性行列です。

変位は有限要素方程式に従い、これが状態（例えば、ヤング率やポアソン比）の関数とします。

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$$

観測値は有限要素方程式によって求まる変位の近辺にあるものとし、ノイズを加えて観測方程式を作ります。

$$\boldsymbol{u}_k' = \boldsymbol{u}_k + \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_k\right) + \boldsymbol{v}_k$$

上式は非線形であるため、そのままではカルマンフィルタにあてはめることができないため線形化を施します。まず、非線形関数 $\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}\right)$ を $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_{k-1}$ まわりで Taylor 展開し２次項以降を無視し、

$$\boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_k\right) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k-1}} \left(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_{k-1}\right)$$

新しい観測値として次式を定義すれば、

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{u}'_k - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\right) + \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k-1}} \boldsymbol{x}_{k-1}$$

最終的に観測方程式ができあがります。

$$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{v}_k, \quad \boldsymbol{A}_k = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_{k-1}}$$

ちなみに、

$$\boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)$$

を求めてみると、有限要素方程式を状態で偏微分し、

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} = \boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{u}\right)$$

となります。この方程式を解くことで $\boldsymbol{A}_k$ が得られます。

計算の手順は次のようになります。

(1) 初期状態と予測誤差共分散行列の初期値 $\boldsymbol{\Sigma}_0$、状態及び観測値のノイズの分散を設定します。

$$\boldsymbol{x}_0 = \overline{\boldsymbol{x}}_0\left(= \boldsymbol{x}_{k-1}\right), \quad \boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{\Sigma}_0\left(= \boldsymbol{P}_{k-1}\right), \quad \boldsymbol{Q} = {\sigma_x}^2\boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{R} = {\sigma_y}^2\boldsymbol{I}$$

(2) 有限要素方程式を解き、変位 $\boldsymbol{u}_0\left(= \boldsymbol{u}_{k-1}\right)$ を求めます。

$$\boldsymbol{F}_{k-1} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{u}_{k-1}$$

(3) 観測行列 $\boldsymbol{A}_k$ を得るため、次の方程式を解きます。

$$\boldsymbol{A}_k = \frac{\partial \boldsymbol{u}_{k-1}}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}} = \boldsymbol{K}^{-1}\left(\frac{\partial \boldsymbol{F}}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}} - \frac{\partial \boldsymbol{K}}{\partial \boldsymbol{x}_{k-1}}\boldsymbol{u}_{k-1}\right)$$

(4) 予測誤差共分散行列を求めます。

$$\boldsymbol{M}_k = \boldsymbol{P}_{k-1} + \boldsymbol{Q}_{k-1}$$

(5) カルマンゲインを求めます。

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{M}_k {\boldsymbol{A}_k}^T\left(\boldsymbol{A}_k \boldsymbol{M}_k {\boldsymbol{A}_k}^T + \boldsymbol{R}_k\right)^{-1}$$

(6) 観測値をもとに状態の推定値を求めます。

$$\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{u}'_k - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\right)\right)$$

(本来は $\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{x}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{y}_k - \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_{k-1}\right)$ ですが、$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{u}'_k - \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{x}_{k-1}\right) + \boldsymbol{A}_k\boldsymbol{x}_{k-1}$ を考慮)

(7) 予測誤差共分散行列を補正します。

$$\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{M}_k - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{M}_k$$

(8) $k = k+1$ として (2) に戻って繰り返します。

これらの過程を実現するには、複雑な数学的手法とプログラミング技術が必要です。地層科学研究所では、カルマンフィルタを用いた有限要素法による逆解析を実用化するため、Geo-Inverse* と名付けたソフトウェアを開発し、様々な場面で逆解析を活用しています。(* Geo-Inverse は販売しておりません)

https://www.geolab.jp お問い合わせは chisouken@geolab.jp

GEOSCIENCE RESEARCH LABORATORY

株式会社 地層科学研究所
本　　社 〒242-0017 神奈川県大和市大和東 3-1-6 JM ビル 4F Tel. 046-200-2281
東京事務所 〒112-0004 東京都文京区後楽 2-3-25 金子ビル 6F Tel. 03-5842-7677
大阪事務所 〒532-0011 大阪市淀川区西中島 5-7-19 第 7 新大阪ビル 301 号 Tel. 06-6886-7774